ANALIZA FUNKCJONALNA I TOPOLOGIA

Lista 6 - Twierdzenia o wykresie domkniętym i odwzorowaniu odwrotnym

1. Uzasadnić, że jeżeli $(X, \| \, . \, \|_1)$ oraz $(Y, \| \, . \, \|_2)$ są przestrzeniami Banacha, to ich iloczyn Kartezjański $X \times Y$ z normą produktową
$$\| (x, y) \| = \| x \|_1 + \| y \|_2$$
też jest przestrzenią Banacha (fakt ten wykorzystuje się w dowodzie twierdzenia o wykresie domkniętym).

2. Niech H będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta i niech $T : H \to H$ będzie symetrycznym przekształceniem liniowym, tzn. takim, że
$$\langle x, T(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$$
dla dowolnych $x, y \in H$. Uzasadnić, że T jest domknięty. Następnie, korzystając z twierdzenia o wykresie domkniętym, uzasadnić, że T jest ograniczony (jest to tzw. twierdzenie Hellingera-Toeplitza).

3. Niech $X = C(0, 1)$ z normą $\| \, . \, \|_\infty$. Pokazać, że operator liniowy pochodnej $T(f) = f'$ określony na dziedzinie $D_T = C^1(0, 1)$ nie jest ograniczony na D_T, ale jest domknięty (ma domknięty wykres). Uzasadnić, że to nie przeczy twierdzeniu o wykresie domkniętym.

4. Niech $X = L^2(-1, 1)$ z normą $\| \, . \, \|_2$. Pokazać, że operator liniowy pochodnej $T(f) = f'$ określony na dziedzinie $D_T = C^1(0, 1)$ nie jest domknięty, analizując ciąg funkcji $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$.

5. Niech $T : c_{00} \to \ell^2$ będzie dany wzorem
$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots)$$
Uzasadnić, że T nie jest domknięty, rozważając odpowiedni ciąg ciągów z c_{00}.

6. Korzystając z twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, pokazać, że jeżeli X jest przestrzenią Banacha z każdą z norm $\| \, . \, \|_1$ oraz $\| \, . \, \|_2$ i istnieje liczba $M > 0$, taka że
$$\| x \|_1 \leq M \, \| x \|_2$$
to obie normy są równoważne.

R. Lenczewski